

Zagadnienia na proseminaria, rok 2023/24

Prof. dr hab. Grzegorz Lewicki

Geometryczne własności przestrzeni Banacha i ich zastosowania.

Celem proseminarium będzie przedstawienie pewnych geometrycznych własności przestrzeni Banacha i ich zastosowań w teorii aproksymacji i teorii punktu stałego.

Przykładowe tematy referatów.

1. Przestrzeń ściśle wypukłe.
2. Przestrzeń jednostajnie wypukłe.
3. Przestrzeń gładkie.
4. Aproksymacja w hiperpłaszczyznach przestrzeni Banacha.
5. Twierdzenia o punktach stałych dla odwzorowań nieoddalających.

Literatura:

1. L. Białas-Cieź, G. Lewicki, T. Kobos, *Podstawy teorii aproksymacji w zadaniach*, PWN 2022.
2. E.W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, AMS Chelsea Publishing 2000.
3. L. Goebel, W. Kirk, *Zagadnienia metrycznej teorii punktów stałych*, Wydawnictwo UMCS Lublin, 1999.
4. M. Fabian, P. Habala, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CMS, Springer 2000.

dr hab. Krzysztof Nowak, dr hab. Anna Pelczar-Barwacz

Tematy proponowane przez dr hab. Krzysztofa Nowaka - Zagadnienia z topologii i geometrii w strukturach o-minimalnych na podstawie monografii:

1. L. van den Dries, *Tame Topology and O-minimal structures*, Cambridge University Press.
2. J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Real Algebraic Geometry*, Springer Verlag.

Propozycje tematów do opracowania na podstawie monografii [1]:

1. Struktury o-minimalne z punktu widzenia geometrii i teorii modeli, struktury o-minimalne na ciałach uporządkowanych.
2. Rozkłady komórkowe dla zbiorów semialgebraicznych i zbiorów definiowalnych.
3. Niezmienniki definiowalne, np. wymiar, charakterystyka Eulera itp.
4. Rodziny definiowalne zbiorów i ich własności, zastosowania.
5. Triangulacja zbiorów definiowalnych, zastosowania.

6. Skończona liczba typów topologicznych w rodzinie definiowalnej zbiorów.
 7. Trywializacja odwzorowań definiowalnych.
 8. Przestrzenie definiowalne, twierdzenie o zanurzeniu.
 9. Definiowalne konstrukcje na przestrzeniach topologicznych (przestrzenie ilorazowe, sklejanie przestrzeni, przestrzenie orbit względem definiowalnego działania grupy).
- Propozycje tematów do opracowania na podstawie początkowych rozdziałów monografii [2]:
10. Ciała rzeczywiście domknięte, tw. Tarskiego-Seidenberga.
 11. Zastosowania tw. Tarskiego-Seidenberga, np. tw. Artina -Langa o homomorfizmie, 17-ty problem Hilberta.
 12. Elementy algebry rzeczywistej, stożki pierwsze, rzeczywista wersja tw. o zerach, Positivstellensatz.

Tematy proponowane przez dr hab. Annę Pelczar-Barwacz:

1. Symetryzacje zbiorów wypukłych w $\mathbb{R}^n$
2. Twierdzenie Caratheodory'ego i Helly'ego
3. Metryka Hausdorffa i twierdzenia o zaokrągłaniu zbiorów wypukłych w $\mathbb{R}^n$
4. Środki symetrii i selektory zbiorów wypukłych w $\mathbb{R}^n$
5. Zbiory gwiazdiste
6. Punkty ekstremalne i eksponowane zbioru wypukłego w przestrzeni unormowanej/lokalnie wypukłej
7. Tw. Kreina-Milmana, Tw. Choqueta o reprezentacji
8. Różniczkowanie funkcji wypukłej w przestrzeniach unormowanych
9. Zasada Ekelanda (optymalizacja)
10. Tw. Schaudera o punkcie stałym

Poza tym dość dowolny (po ustaleniu) temat z analizy funkcjonalnej (przestrzenie Banacha)

Literatura:

Geometria zbiorów wypukłych : zagadnienia wybrane/ Selected topics in convex geometry,

M.Moszyńska

wybrane rozdziały *Banach Space Theory*, M.Fabian, P.Habala, P.Hajek, V.Montesinos, V.Zizler

dr Marcin Sroka

Tematy* (przykłady):

- Algebra zewnętrzna [F,1]
- Teoria dystrybucji i prądów [F, 4.1]
- Równanie Laplace'a [GT, 2]
- Zasada maksimum [GT, 3; H 1.1]
- Oszacowanie Kryłowa-Safonova [H, 1.2]
- Oszacowania Schaudera [H, 1.3]
- Zasada ciągłości [GT, 5]
- Przestrzenie Sobolewa [GT, 7]

- Równanie Monge'a-Ampere'a [H, 6]

[F] H. Federer, *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153 Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1969. xiv+676 pp.

[GT] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*. Reprint of the 1998 edition Classics Math. Springer-Verlag, Berlin, 2001. xiv+517 pp. ISBN 3-540-41160-7

[H] Q. Han, *Nonlinear elliptic equations of the second order*. Grad. Stud. Math., 171 American Mathematical Society, Providence, RI, 2016. viii+368 pp. ISBN:978-1-4704-2607-1

Tematy ambitniejsze*:

- Rzeczywiste równanie Monge'a-Ampere'a

Caffarelli, L.(1-CHI); Nirenberg, L.(1-NY-X); Spruck, J.(1-CUNYB) *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge-Ampère equation*. Comm. Pure Appl. Math.37(1984), no.3, 369–402.

- Zespolone równanie Monge'a-Ampere'a

Caffarelli, L.(1-CHI); Kohn, J. J.(1-PRIN); Nirenberg, L.(1-NY-X); Spruck, J.(1-MA) *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. II. Complex Monge-Ampère, and uniformly elliptic, equations*. Comm. Pure Appl. Math.38(1985), no.2, 209–252.

Kołodziej, Sławomir(PL-JAGL) *The complex Monge-Ampère equation*. Acta Math.180(1998), no.1, 69–117.

- Równania Hessianowe

Caffarelli, L.(1-CHI); Nirenberg, L.(1-NY-X); Spruck, J.(1-MA) *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. III. Functions of the eigenvalues of the Hessian*. Acta Math.155(1985), no.3-4, 261–301.

- Wielomiany hiperboliczne

Harvey, F. Reese(1-RICE); Lawson, H. Blaine, Jr.(1-SUNYS) *Gårding's theory of hyperbolic polynomials*.(English summary) Comm. Pure Appl. Math.66(2013), no.7, 1102–1128.

- Twierdzenie Calabi-Yau

Błocki, Zbigniew(PL-JAGL) *The complex Monge-Ampère equation in Kähler geometry*.(English summary)Pluripotential theory, 95–141. Lecture Notes in Math., 2075 Fond. CIME/CIME Found. Subser. Springer, Heidelberg, 2013 ISBN:978-3-642-36420-4

- Potok Kahlera-Ricciego

Cao, Huai Dong(1-UCSD) *Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds*. Invent. Math.81(1985), no.2, 359–372.

- Metryki Kahlera o stałej krzywiznie skalarnej

Chen, Xiuxiong(PRC-HEF-IGP); Cheng, Jingrui(1-WI) *On the constant scalar curvature Kähler metrics (I)—A priori estimates*. J. Amer. Math. Soc.34(2021), no.4, 909–936.

*Ponadto możliwy jest wybór, po uzgodnieniu, **innego tematu** z zakresu: Analiza matematyczna (rzeczywista i zespolona), Równania różniczkowe cząstkowe, geometria różniczkowa (Riemannowska, zespolona), Analiza geometryczna

prof. dr hab. Robert Wolak

1. Krzywe płaskie i przestrzenne będące rozwiązaniami klasycznych problemów fizycznych
Rachunek wariacyjny i optymalizacja – kilka innych tematów do uzgodnienia
2. Powierzchnie minimalne w $\mathbb{R}^3$, teoria, przykłady, modelowanie komputerowe, np. w MAPLE
3. Powierzchnie o stałej krzywiznie średniej, teoria i przykłady
Lit.: J. Oprea, *Geometria różniczkowa i jej zastosowania*, PWN 2002
4. Modele matematyczne zjawisk przyrodniczych

kilka tematów do uzgodnienia

5. Modele minimalne kohomologii rozmaitości. Teoria oraz przykłady

kilka tematów, literatura w j. angielskim

6. Algebry Lie'go i ich kohomologie

kilka tematów, literatura w j. angielskim

7. rozmaitości otwarte, pojęcie wzrostu, teoria i przykładu
8. możliwość pisanie pracy z klasycznej geometrii, geometrycznej teorii grup skończonych, a także z szeroko pojętej geometrii i topologii po indywidualnym uzgodnieniu problematyki.