

TEMATYKA PROSEMINARIÓW W SEMESTRZE LETNIM 2025/2026

Grupa 1 **Grzegorz Kapustka** **Algebra i Geometria**

- (1) Proponuje przerobienie następującej książki:
<https://people.tamu.edu/~jml/Tbookintro.pdf>
- (2) Inną możliwością jest uzgodniony dowolny ze mną temat z geometrii, algebry, albo geometrii algebraicznej, (również inne dziedziny).

Grupa 2 **Piotr Kobak i Dariusz Zawisza** **Matematyka finansowa i metody probabilistyczne**

Tematy prac licencjackich w naszej grupie będą dotyczyły głównie matematyki finansowej i ubezpieczeniowej w tym: wyceny instrumentów pochodnych, modelowania ryzyka finansowego i kredytowego, optymalizacji portfela na rynku kapitałowym, teoretycznych podstaw matematyki finansowej. Mogą się również pojawić tematy dotyczące statystyki oraz rachunku prawdopodobieństwa oraz sterowania stochastycznego.

Proponowane tematy:

- (1) Teoria ruiny w ujęciu matematycznym;
- (2) Sterowanie stochastyczne w czasie dyskretnym i zastosowania;
- (3) Wycena CDS przy użyciu modelu intensywności;
- (4) Proces Ornsteina-Uhlenbecka i modelowanie stóp procentowych;
- (5) Dynamiczny model Markowitza w czasie dyskretnym;
- (6) Funkcja użyteczności i aksjomaty wyboru;
- (7) Model Blacka-Littermana;
- (8) Funkcje copula i modelowanie zależności w finansach;
- (9) Modele wyceny opcji (opcje walutowe, opcje na akcje z dywidendą);
- (10) Parametry greckie w modelu Blacka-Scholesa, delta-hedging, delta-gamma hedging i inne;
- (11) Opcje egzotyczne – wycena w modelu Blacka Scholesa (podejście analityczne lub zastosowanie metod numerycznych, np. Monte Carlo, drzewa dwumianowe, metody różnic skończonych);

- (12) Strategie opcyjne: ryzyko i oczekiwana stopa zwrotu, zastosowania w osłonie przed ryzykiem, efektywność zabezpieczenia przed ryzykiem;
- (13) Lokaty strukturyzowane – wycena z zastosowaniem opcji egzotycznych
- (14) Instrumenty zerokosztowe na rynkach OTC (np. struktury opcyjne typu Target Forward, range accrual) - mechanizm działania, wycena metodą Monte Carlo;
- (15) Uzgodniony inny temat pasujący do tematyki seminarium.

=====

Grupa 3
Grzegorz Lewicki
Podstawy teorii aproksymacji

Niech X będzie przestrzenią Banacha a $Y \subset X$ jej niepustym podzbiorem. Zdefiniujmy dla $x \in X$,

$$dist(x, Y) = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$$

oraz

$$P_Y(x) = \{y \in Y : \|x - y\| = dist(x, Y)\}.$$

Elementy zbioru $P_Y(x)$ nazywamy elementami najlepszej aproksymacji dla x w Y . Celem proseminarium będzie badanie własności zbiorów $P_Y(x)$. W szczególności będziemy starali się odpowiedzieć na pytania kiedy zbiór

$P_Y(x) \neq \emptyset$, kiedy jest jednoelementowy i jak wyznaczać efektywnie elementy najlepszej aproksymacji.

Przykładowe tematy referatów.

1. Twierdzenia o istnieniu elementu najlepszej a aproksymacji.
2. Twierdzenia o jedyności elementu najlepszej aproksymacji.
3. Aproksymacja w przestrzeniach funkcji ciągłych.
4. Aproksymacja wielomianowa.
5. Efektywne znajdowanie elementu najlepszej aproksymacji.

Literatura:

1. L. Białas-Cież, G. Lewicki, T. Kobos, *Podstawy teorii aproksymacji w zadaniach*, PWN 2022.
 2. E.W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, AMS Chelsea Publishing 2000.
 3. M. Fabian, P. Habala, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CMS, Springer 2000.
- =====

Grupa 4

Wiesław Pawłucki

Analiza Formalna i Funkcje Analityczne

Podstawowym materiałem, na którym będziemy pracować, będzie monografia Stanisław Łojasiewicz i Jacek Stasica, *Analiza formalna i funkcje analityczne*; Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, 2005. Celem jest poznanie teorii funkcji analitycznych zarówno zmiennych rzeczywistych jak i zespolonych, bazujące na definicji funkcji analitycznej jako lokalnie rozwijalnej w szereg potęgowy zbieżny. Tematyka, w której szkoła krakowska ma znakomite osiągnięcia, stanowi doskonałą okazję do powtórzenia i poszerzenia wiedzy z analizy, algebry oraz topologii.

Oto wstępna lista proponowanych tematów szczegółowych:

- (1) Sumy nieskończone zbieżne.
- (2) Twierdzenie o bezwzględnej zbieżności sumy.
- (3) Twierdzenia o łączności sumy.
- (4) Twierdzenie o ciągłości i o różniczkowaniu sumy.
- (5) Formalne szeregi potęgowe n zmiennych nad ciałem.
- (6) Rząd szeregu i topologia Krulla w pierścieniu szeregów potęgowych.
- (7) Twierdzenie o szeregach uwikłanych.
- (8) Twierdzenie przygotowawcze dla formalnych szeregów potęgowych.
- (9) Szeregi potęgowe zbieżne.
- (10) Normy Grauert-Malgrange'a w pierścieniu szeregów potęgowych zbieżnych.
- (11) Twierdzenie o szeregach uwikłanych zbieżnych.
- (12) Pojęcie funkcji analitycznej w punkcie.
- (13) Zasada identyczności dla funkcji analitycznych.
- (14) Twierdzenie o funkcjach uwikłanych i twierdzenie przygotowawcze dla funkcji analitycznych.

=====

Grupa 5

Tomasz Pełka

Geometria algebraiczna i teoria osobliwości

Celem proseminarium jest przegląd tematów z klasycznej i współczesnej geometrii algebraicznej, które mogą zainspirować do podjęcia dalszych badań na studiach magisterskich; oraz przygotowanie do egzaminu licencjackiego.

Aby uzyskać zaliczenie, każda osoba uczestnicząca w proseminarium powinna:

- (1) przedstawić rozwiązania kilku zadań z egzaminów licencjackich z poprzednich lat,
- (2) wygłosić wykład na wybrany przez siebie temat, i napisać na jego podstawie krótką pracę.

Na każdy “powtórkowy” referat (1) przewiduję ok. pół spotkania (45 minut), konkretne tematy będą rozdzielone na pierwszym spotkaniu w zależności od potrzeb uczestników. Właściwy wykład (2) powinien zająć jedno spotkanie (90 minut), i dotyczyć tematu *zaproponowanego przez uczestnika*: może być to jeden z tematów zasugerowanych poniżej, ale niekoniecznie, *bardzo zachęcam do przedstawienia własnych pomysłów*. Przed każdym wykładem chciałbym odbyć z osobą referującą co najmniej jedno spotkanie, gdzie ustalimy dokładny zakres wykładu. Ze względu na czas potrzebny na przygotowanie takich wykładów, pierwsze kilka spotkań poświęcimy prawdopodobnie na “powtórki” (1).

Jedną z propozycji serii wykładów jest (częściowe) zreferowanie książki [Mil68], która w bardzo przystępny sposób wprowadza do teorii (izolowanych) osobliwości hiperpowierzchni. Na pierwszym, organizacyjnym spotkaniu streszczę jej zawartość i zaproponuję następujący podział tematów:

1. §2: Definicja łączy (*link*) osobliwości $V: L = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$, *conical structure theorem 2.10* $(\mathbb{B}_\varepsilon, V) \cong \text{Cone}(\mathbb{S}_\varepsilon, L)$. Opis linków dla: punktu gładkiego, punktów podwójnych (lemat Morse’a), stożków.

2. §3 *Curve selection lemma*.

Dodatkowo, jako osobny referat: wersja nieskończenie wymiarowa w przestrzeni łuków [Reg06], zastosowanie do problemu Nasha w wymiarze 2 [FdBP12, dFD16], zob. przegląd literatury w [dF25].

3. §4: Rozwłóknienie Milnora w sferze: $f/|f|: \mathbb{S}_\varepsilon \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$, pojęcie *open book*. Przykład: rozwłóknienie Hopfa. Dodatkowo, jako osobny referat: chirurgie na włóknie Milnora gdy $\varepsilon \rightarrow \infty$ [Bor12], link w nieskończoności [NR87].

4. Lemma 5.10: Rozwłóknienie Milnora w tubie: $f: \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(\partial \mathbb{D}_\delta) \rightarrow \partial \mathbb{D}_\delta$ jest równoważne rozwłóknieniu w sferze [Sea19, §4]. Dodatkowo: uogólnienia dla osobliwości nieizolowanych [Sea19, §5].

5. §6: włókno Milnora jest homotopijnie równoważne z bukietem sfer $\bigvee_\mu \mathbb{S}^n$.

6. §7: *Liczba Milnora*: $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[z_0, \dots, z_n]] / \langle \frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \rangle$ - algebraiczny niezmiennik!

Dodatkowo: liczba Tjuriny; przypadek nieizolowany: liczby Lê [Mas95, Eyr16]

7. §9: Egzotyczne sfery Brieskorna $f = \sum_i z_i^{a_i}$.

Pozostałe propozycje referatów są luźno związane z teorią osobliwości i geometrią algebraiczną (ułożone w subiektywnej kolejności od najłatwiejszych).

Poniższa lista jest oczywiście wstępna, będzie aktualizowana w zależności od preferencji i stanu wiedzy uczestników.

Ogólnie, wykład nie powinien zawierać szczegółów dowodów, a raczej przegląd twierdzeń, przykładów (w tym: samodzielnie wykonanych ćwiczeń) i pytań otwartych.

1. Konstrukcje przy użyciu cyrkla i linijki oraz przy użyciu origami (trysekcja kąta, podwojenie sześciangu). Opis ciał liczb zespolonych konstruowalnych w ten sposób [Alp00, Hul11]

2. Zastosowania metod dodatniej charakterystyki w geometrii algebraicznej nad $\mathbb{C}$ [Ser09]: twierdzenie Ax-Grothendiecka (iniektywne odwzorowanie wielomianowe $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest suriektywne), algebraiczne działanie grupy skończonej na $\mathbb{C}^n$ ma punkt stały.

3. Osobliwości krzywych płaskich: rozwinięcie Puiseaux, wielokąty Newtona [BK86, §8.3], [Wal04, §2]; związek z geometrią tropikalną [MS15, §1.5]

4. Rozwiązywanie osobliwości krzywych płaskich: [BK86, §8.4], [Wal04, §3], topologiczny opis linku jako iterowanego węzła torusowego, rozkład włókna Milnora, zob. referencje w [PP25].

5. Płaskie krzywe rzutowe: krzywa dualna, wzór na genus [Wal04, §7], [BK86, §9]. Przykłady [Moe08], problem symplektycznej izotopii [GS22].

6. Grupa Cremony odwzorowań biwymiernych $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$: opis generatorów, przykłady konstrukcji krzywych, dynamika [Bla12, Can13].

7. Wprowadzenie do geometrii torycznej za [Ful93, §1.1] lub [CLS11, §1.1]. Dodatkowo: konkretne obliczenia np. przy pomocy Macaulay2, zob. [CLS11, Appedix B].

8. *Fiber product trick* Danielewskiego w problemie skracania [Kra96, §3]: konstrukcje takich rozmaitości afinicznych $X \not\cong Y$, że $X \times \mathbb{C}^1 \cong Y \times \mathbb{C}^1$ [Dan89, Dub13].

9. Twierdzenie Abhyankara-Moha-Suzukiego: obraz algebraicznego zanurzenia $\mathbb{C}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ jest algebraicznie równoważny prostej. Szkic dowodu w wersji geometrycznej, np. wg. [Gur02, Pal15] lub algebraicznej, np. wg. [ML15]. Kontraprzykłady w charakterystyce dodatniej [AM75, §1] i w kategorii analitycznej [FGR96]. Możliwe uogólnienia i problemy otwarte [Kra96, §4].

10. *Euclidean distance degree* [DH⁺16], topologiczna charakteryzacja [MRW20], zastosowania w rozpoznawaniu obrazów.

REFERENCES

- [Alp00] R. Alperin, *A mathematical theory of origami constructions and numbers*, New York J. Math. **6** (2000), 119–133.
- [AM75] S. Abhyankar and T. T. Moh, *Embeddings of the line in the plane*, J. Reine Angew. Math. **276** (1975), 148–166.
- [BK86] E. Brieskorn and H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, 1986 ed., Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986, Translated from the German original by John Stillwell.

- [Bla12] J. Blanc, *Finite subgroups of the Cremona group of the plane*, 35th Autumn School in Algebraic Geometry, Łukęcin, Poland <https://www.mimuw.edu.pl/~jarekw/EAGER/pdf/FiniteSubgroupsCremona.pdf>, 2012.
- [Bor12] M. Borodzik, *Morse theory for plane algebraic curves*, J. Topol. **5** (2012), no. 2, 341–365.
- [Can13] S. Cantat, *The Cremona group in two variables*, European Congress of Mathematics, Eur. Math. Soc., Zürich, 2013, pp. 211–225. MR 3469123
- [CLS11] D. Cox, J. Little, and H. Schenck, *Toric varieties*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 124, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [Dan89] W. Danielewski, *On a cancellation problem and automorphism group of affine algebraic varieties*, preprint, Warsaw, 1989.
- [dF25] T. de Fernex, *The Nash Problem and Du Val singularities in positive characteristic*, Oberwolfach Reports, 2025.
- [dFD16] T. de Fernex and R. Docampo, *Terminal valuations and the Nash problem*, Invent. Math. **203** (2016), no. 1, 303–331.
- [DH⁺16] J. Draisma, E. Horobeț, et al., *The Euclidean distance degree of an algebraic variety*, Found. Comput. Math. **16** (2016), no. 1, 99–149.
- [Dub13] A. Dubouloz, *Affine open subsets in A^3 without the cancellation property*, Commutative algebra and algebraic geometry (CAAG-2010), Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser., vol. 17, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2013, pp. 63–67.
- [Eyr16] C. Eyrat, *Topics in equisingularity theory*, IMPAN Lecture Notes, vol. 3, Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warsaw, 2016.
- [FdBP12] J. Fernández de Bobadilla and M. Pe Pereira, *The Nash problem for surfaces*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), no. 3, 2003–2029.
- [FGR96] F. Forstneric, J. Globevnik, and J.-P. Rosay, *Nonstraightenable complex lines in C^2* , Ark. Mat. **34** (1996), no. 1, 97–101.
- [Ful93] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, The William H. Roever Lectures in Geometry.
- [GS22] M. Golla and L. Starkston, *The symplectic isotopy problem for rational cuspidal curves*, Compos. Math. **158** (2022), no. 7, 1595–1682.
- [Gur02] R. V. Gurjar, *A new proof of the Abhyankar-Moh-Suzuki theorem*, Transform. Groups **7** (2002), no. 1, 61–66.
- [Hul11] T. Hull, *Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill*, Amer. Math. Monthly **118** (2011), no. 4, 307–315.
- [Kra96] H. Kraft, *Challenging problems on affine n -space*, no. 237, 1996, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95, pp. Exp. No. 802, 5, 295–317.
- [Mas95] D. Massey, *Lê cycles and hypersurface singularities*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1615, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [Mil68] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, No. 61, Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968.
- [ML15] L. Makar-Limanov, *A new proof of the Abhyankar-Moh-Suzuki theorem via a new algorithm for the polynomial dependence*, J. Algebra Appl. **14** (2015), no. 9, 1540001, 12.
- [Moe08] T. Moe, *Rational cuspidal curves*, Master thesis, University of Oslo, [arXiv:1511.02691](https://arxiv.org/abs/1511.02691), 2008.
- [MRW20] L. Maxim, J. Rodriguez, and B. Wang, *Euclidean distance degree of the multiview variety*, SIAM J. Appl. Algebra Geom. **4** (2020), no. 1, 28–48.
- [MS15] D. Maclagan and B. Sturmfels, *Introduction to tropical geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 161, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [NR87] W. Neumann and L. Rudolph, *Unfoldings in knot theory*, Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 409–439.
- [Pal15] K. Palka, *A new proof of the theorems of Lin-Zaidenberg and Abhyankar-Moh-Suzuki*, J. Algebra Appl. **14** (2015), no. 9, 1540012, 15.
- [PP25] P. Popescu-Pampu, *Tropical and logarithmic techniques for the study of milnor fibers*, Slides for a lecture course at the Research School Logarithmic and non-archimedean methods in singularity theory, CIRM, Marseille <https://www.cirm-math.fr/RepOrga/3267/Slides/2025-01-Popescu-CIRM.pdf>, 2025.
- [Reg06] A. Reguera, *A curve selection lemma in spaces of arcs and the image of the Nash map*, Compos. Math. **142** (2006), no. 1, 119–130.
- [Sea19] J. Seade, *On Milnor’s fibration theorem and its offspring after 50 years*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **56** (2019), no. 2, 281–348.
- [Ser09] J.-P. Serre, *How to use finite fields for problems concerning infinite fields*, Arithmetic, geometry, cryptography and coding theory, Contemp. Math., vol. 487, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 183–193.
- [Suz74] M. Suzuki, *Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l’espace C^2* , J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 241–257.
- [Wal04] C. T. C. Wall, *Singular points of plane curves*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 63, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.